ВВЕДЕНИЕ. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Все математические дисциплины можно условно разделить на *дискретные* и *непрерывные*. Дискретная математика – это та часть математики, главной особенностью которой является изучение отдельных объектов, без привлечения понятия непрерывности, т.е. дискретность – это антипод непрерывности. В дискретной математике отсутствует понятие предельного перехода, присущее классической, «непрерывной» математике. Она занимается изучением дискретных структур, которые возникают как внутри математики, так и в ее приложениях. Однако она зародилась в глубокой древности, раньше, чем непрерывная математика, хотя особую значимость приобрела только в последние десятилетия, в связи с повсеместным внедрением в практику информационных технологий.

Таким образом, в широком смысле дискретная математика включает в себя все разделы математики, в которых не используются топологические методы, в частности понятие непрерывности. Это – все разделы алгебры, математическая логика, почти вся теория чисел (в том числе всевозможные компьютерные арифметики), многие разделы экономико-математических методов, комбинаторика и многие другие дисциплины. В более узком смысле дискретная математика – это те разделы математической логики, алгебры, теории чисел и математической кибернетики, которые непосредственно составляют теоретический фундамент информатики. В этом узком смысле дискретная математика включает в себя теорию булевых функций и их минимизацию, теорию графов и многие разделы теоретической кибернетики, теорию автоматов и формальных грамматик, комбинаторику, теорию алгоритмов (в том числе теорию сложности вычислений), криптографию и теорию кодирования.

Некоторые из вышеперечисленных разделов имеют не только многочисленные «внутренние» (с точки зрения специалиста по информационным системам или вычислительной техники) приложения, используемые, к примеру, при построении различных дискретных устройств, в программировании и т.д., но их результаты и методы применяются также при решении многих нужных для практики задач. Например, при рассмотрении транспортных задач, для нахождения оптимальных решений в управлении, для выделения «узких мест» при планировании и разработке проектов, при составлении оптимальных расписаний, а также при моделировании сложных технологий и процессов различной природы.

Целью изучения дисциплины является ознакомление студентов с системой понятий и некоторыми наиболее важными в приложениях методами теории множеств, математической логики, теории булевых функций и теории графов. Знания и навыки, полученные при ее изучении, используются в дисциплинах: «Информатика», «Программирование», «Структуры и алгоритмы обработки данных в ЭВМ», «Базы данных», «Экспертные и интеллектуальные системы» и т.д. Но в особенности знания по дискретной математике пригодятся при изучении дисциплин, связанных с функциональным и логическим программированием, кодированием и защитой информации.

Основная задача состоит в том, чтобы будущие специалисты чётко освоили основные понятия и приёмы работы с булевыми функциями и графами: построение таблиц значений; поиск и исключение фиктивных переменных; приведение булевых функций к стандартной форме (д.н.ф., к.н.ф., многочлен Жегалкина); основные методы минимизации булевых функций; построение диаграммы (рисунка) графа по его матрицам смежности и инцидентности и обратная задача; установление изоморфизма (одинаковости) графов; определение основных характеристик и свойств графов (векторы степеней, планарность, эйлеровость, гамильтоновость и т.п.); изучение важного частного случая графов – деревьев и их свойств.

За недостатком места о приложениях говорится относительно мало. Однако такие примеры содержатся в литературе.

Данное пособие предназначено в основном для изучения основ именно дискретной математики в узком понимании слова, хотя при этом затронуты основополагающие разделы математической логики – исчисление высказываний и исчисление предикатов. Однако математическую логику настоятельно рекомендуется изучать по более фундаментальным источникам, например, [1, 11,15,16,19,23,29]. В то же время, многие разделы дискретной математики в узком смысле слова в данном пособии никак не отражены, в частности, теория кодирования и криптография, теория алгоритмов и теория сложности вычислений. Это связано, в первую очередь, с ограниченностью отводимого времени для изучения дисциплины в учебных планах у студентов, обучающихся информационным технологиям и использованию вычислительной техники. Курс лекций будет также полезен будущим специалистам по прикладной математике, в частности по математическому и компьютерному моделированию.

Пособие – это существенно поработанный и дополненный вариант пособий [20,21].

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

См. лекции 1-5

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ И ИХ МИНИМИЗАЦИЯ

Теорию булевых функций и их минимизации можно считать по праву центральным моментом для математического образования любых инженеров, чья деятельность подразумевает активное использование ЭВМ.

6 ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ. ДВОЙСТВЕННЫЕ И САМОДВОЙСТВЕННЫЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

7 СОВЕРШЕННЫЕ ДНФ И КНФ. ПОЛИНОМ ЖЕГАЛКИНА. МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ. ПОЛНОТА. КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ

8 ПРОБЛЕМА МИНИМИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ, ИНДЕКСЫ ПРОСТОТЫ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД. СОВЕРШЕННАЯ, ТУПИКОВАЯ, МИНИМАЛЬНАЯ, СОКРАЩЕННАЯ ДНФ

9 МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ СОКРАЩЕННЫХ ДНФ

См. лекции 6-10

10 МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ТУПИКОВЫХ ДНФ

Вначале описываются аналитические методы, позволяющие выписывать некоторые тупиковые д.н.ф., затем – метод нахождения всех тупиковых д.н.ф. При малом количестве переменных для поиска части тупиковых д.н.ф. могут с успехом применяться геометрические методы (см. подразделы 8.2 и 8.3). Но иногда, выписав геометрическим методом или методами подразделов 10.1 и 10.2 большое количество тупиковых д.н.ф., невозможно быть уверенным в том, что других тупиковых нет. Гарантировать это может только метод из подраздела 10.3, который выдаёт все тупиковые, и как мы уже знаем из п. 8.13, среди них содержатся все минимальные д.н.ф.

10.1 Метод граничных точек

Он позволяет найти некоторые тупиковые д.н.ф., исходя из произвольной дизъюнкции простых импликант, а если исходная д.н.ф. – сокращённая, то при наличии терпения и внимательности можно найти все тупиковые д.н.ф. Если некоторые термины и обороты речи при описании данного метода Вам кажутся странными, то перечитайте заново подразделы 8.2 и 8.4 о соответствии аналитических и геометрических образов.

Метод основан на следующих фактах, изложенных в леммах 10.1 и 10.2.

Л е м м а 10.1 *Элементарная конъюнкция, состоящая из r различных литер (т.е. ранга r, см. подраздел 8.2), задаёт 2^{n-r} точек – вершин n-мерного куба, где n – общее количество переменных.*

П р и м е р 10.1 Конъюнкция $x_1\overline{x}_3 = x_1^1 x_3^0$ при наличии всего двух переменных x_1 и x_3, определяет одну точку (<u>1</u>,<u>0</u>); когда переменных три x_1, x_2 и x_3 – уже две точки: (<u>1</u>,0,<u>0</u>) и (<u>1</u>,1,<u>0</u>); при четырёх переменных x_1, x_2, x_3 и x_4 – 2^{4-2} = 4 точки: (<u>1</u>,0,<u>0</u>,0), (<u>1</u>,0,<u>0</u>,1), (<u>1</u>,1,<u>0</u>,0) и (<u>1</u>,1,<u>0</u>,1) и т.д. Здесь подчёркнуты координаты точек, которые однозначно задаются конъюнкцией равенств: $x_1 = 1$, $x_3 = 0$. Остальные $n - r$ координат могут быть любыми – 0 или 1.

Пусть $A =_g K_1 \vee \ldots \vee K_t$ – дизъюнкция простых импликант, и элементарная конъюнкция K_i имеет ранг r. Не умаляя общности, можно считать, что $K_i =_g x_1^{\alpha_1} \ldots x_r^{\alpha_r}$, а переменные $x_{r+1},\ldots,x_n$ не участвуют в её записи. Если это не так, то тогда можно перенумеровать переменные. Рассмотрим элементарные конъюнкции $K_i(\beta_{r+1},\ldots,\beta_n) =_g K_i \cdot x_{r+1}^{\beta_{r+1}} \ldots x_n^{\beta_n}$ для всевозможных наборов нулей и единиц $\beta_{r+1},\ldots,\beta_n$.

Л е м м а 10.1 *Простая импликанта K_i может быть удалена тогда и только тогда, когда все конъюнкции $K_i(\beta_{r+1},\beta_{r+2},\ldots,\beta_n)$ поглощаются другими импликантами K_j при $i \neq j$, т.е. для любого набора $(\beta_{r+1},\beta_{r+2},\ldots,\beta_n)$ нулей и единиц, найдётся такая импликанта K_j при $i \neq j$, что K_j является частью конъюнкции $K_i(\beta_{r+1},\beta_{r+2},\ldots,\beta_n)$.*

Упражнение 10.1 *Докажите леммы 10.1 и 10.2.*

Как видно из формулировки леммы 10.2, для проверки на устранимость конъюнкции ранга r достаточно построить таблицу из 2^{n-r} строк. На практике часто бывает, что строк нужно добавлять гораздо меньше.

Пример 10.2 Рассмотрим д.н.ф. $A =_g x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_2x_4$ для функции $h = A$, в предположении, что всего имеется только четыре переменных. Пусть $K_1 = x_1x_2$, $K_2 = x_1x_3$, $K_3 = x_2\bar{x}_3$, $K_4 = x_2x_4$. Для испытания K_1 строим таблицу не из четырёх строк, а сначала из двух – таблица 10.1, т.е. мы добавляем недостающие переменные постепенно – по одной.

Таблица 10.1

β_3	$K_1(\beta_3) = x_1x_2x_3^{\beta_3}$	Чем поглощается
0	$x_1x_2\bar{x}_3$	K_3
1	$x_1x_2x_3$	K_2

Таким образом, мы убеждаемся, что K_1 может быть удалена, и при этом мы добавили всего две строки, а не четыре. При испытании K_4 тоже пробуем ограничиться добавлением только одной переменной (одного «ребра») – таблица 10.2.

Таблица 10.2

β_1	$K_4(\beta_1) = x_1^{\beta_1}x_2x_4$	Чем поглощается
0	$\bar{x}_1x_2x_4$	–
1	$x_1x_2x_4$	K_1

Добавив только одну переменную x_1, сделать вывод о том, что K_4 неустранима (т.е. является *ядровой* или *существенной*), нельзя, ввиду того, что хотя «ребро» $\bar{x}_1x_2x_4$ не содержится целиком ни в одной из других «граней», составляющие его «точки-вершины» могут поглощаться отдельно. Расширяем таблицу 10.2 для той её части, где стоит прочерк – таблица 10.3

Таблица 10.3

β_1	β_3	$K_4(\beta_1,\beta_3) = x_1^0x_3^{\beta_3}x_2x_4$	Чем поглощается
0	0	$\bar{x}_1\bar{x}_3x_2x_4$	K_3
0	1	$\bar{x}_1x_3x_2x_4$	–

Теперь видно, что импликанта K_4 – ядровая, так как точка-вершина, соответствующая конъюнкции $\bar{x}_1x_3x_2x_4$ не входит больше ни в какую другую «грань». Аналогично, можно исследовать K_2 и K_3. Но в данном случае этого можно не делать потому, что из таблицы для испытания K_1 видно, что если K_1 удалить, то нужно обязательно оставить и K_2, и K_3, а K_4 вообще удалить нельзя, т.е. $K_2 \vee K_3 \vee K_4 = x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_2x_4$ – единственная в данном случае тупиковая д.н.ф., а следовательно, она и минимальная для функции h.

Упражнение 10.2* *Докажите, что мы бы получили ту же самую тупиковую д.н.ф. для функции h из предыдущего примера, если считали, что функция зависит от пяти или шести переменных.*

10.2 Метод исключения подчинённых строк и доминирующих столбцов и циклических таблиц

Этот метод также позволяет находить одну за другой тупиковые д.н.ф., если уже известна сокращённая д.н.ф. для данной функции от n переменных. А в случае применения *процедуры ветвления* (см. ниже) можно почти гарантировать, что полученная д.н.ф. – минимальная.

Описание алгоритма. По содержащимся в сокращённой д.н.ф. простым импликантам составляем импликантную таблицу, заголовки строк которой – простые импликанты, а заголовки столбцов – элементарные конъюнкции, входящие в совершенную д.н.ф. Точнее, заголовками рядов будут не сами импликанты, а соответствующие им наборы нулей, единиц и символов X длины n. В таблице помечаем значком v пересечение строки и столбца, если заголовок столбца является импликантой заголовка строки, другими словами, если заголовок строки является частью заголовка столбца.

После этого делается несколько проходов, на каждом из которых выполняются следующие преобразования с импликантной таблицей.

I. Если в каком-то столбце имеется только одна метка, то простая импликанта, соответствующая этой строке, является существенной (ядровой), и она обязательно должна присутствовать во всякой минимальной д.н.ф., а значит, и в любой тупиковой. Включив эту импликанту в строящуюся тупиковую д.н.ф., можно исключить из дальнейшего рассмотрения строку и все столбцы с пометками для этой простой импликанты (почему?).

II. Если все пометки i-ой строки имеются также в j-ой строке, то говорят, что j-я строка *доминирует* над i-ой, и i-ую строку (*подчинённую*) можно исключить из дальнейшего рассмотрения (почему?). В частности, из рассмотрения исключаются строки без пометок, разумеется такая ситуация возможна только после того, как были вычеркнуты некоторые столбцы.

III. Если все пометки k-го столбца имеются также в m-ом столбце таблицы, то m-ый столбец *доминирует* над k-ым и m-ый столбец можно исключить из дальнейшего рассмотрения (почему?).

Исключение существенных импликант, доминируемых (подчинённых) строк и доминирующих столбцов проводят до тех пор, пока это возможно. Полученная после таких преобразований таблица называется *циклической.*

Для выбора минимальной (тупиковой) д.н.ф. в циклической таблице используют *процедуру ветвления.* Согласно алгоритму этой процедуры выбирают столбец с минимальным количеством пометок (таких столбцов может быть несколько) и для этих столбцов выбирают из строк, содержащих пометку в выбранном столбце, ту, которая содержит максимальное количество пометок и включают ее в строящуюся д.н.ф. (почему?). После этого исключают строку, соответствующую найденной простой импликанте, и все помеченные в этой строке столбцы из дальнейшего рассмотрения. Если появилась строка, в которой во всех столбцах стоят пометки, то эту импликанту включают в минимальную д.н.ф. и на этом процесс нахождения минимальной ДНФ закончен (почему?). В противном случае выполняют преобразования для получения новой циклической таблицы.

В результате описанных преобразований таблицы должны получить тупиковую, и возможно, минимальную д.н.ф.

Замечание. Если дана сокращённая д.н.ф., то необязательно выписывать совершенную д.н.ф. для нахождения заголовков столбцов, т.е. наборов длины n, что соответствуют вершинам куба. Для этого можно применить таблицы граничных точек, описанные в подразделе 10.2.

Пример 10.3 Найдём тупиковые, и если повезёт, то и минимальные д.н.ф., для функции $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,1,2,3,5,6,8,10,12,13,14)$ из примера 9.3. Мы уже знаем, что $\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3$ – сокращённая д.н.ф. функции $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Составляем импликантную таблицу – см. таблицу 10.4. В первом столбце проставлены сверху вниз наборы из 0, 1 и символов пустого места X, соответствующие простым импикантам, т.е. вместо

Таблица 10.4 – Импликантная таблица функции f

	0	1	2	3	5	6	8	10	12	13	14	
	0000	0001	0010	0011	0101	0110	1000	1010	1100	1101	1110	
X0X0	v		v				v	v				(3)
XX10			v			v		v			v	(2)
1XX0							v	v	v		v	
00XX	v	v	v	v								(1)
X101					v					v		
0X01		v			v							(4)
110X									v	v		
	(1)	(1)	(1)	(1)		(2)		(2)			(2)	

$\bar{x}_2\bar{x}_4$ записан набор X0X0, вместо $x_3\bar{x}_4$ – XX10, вместо $x_1\bar{x}_4$ – 1XX0 и т.д.

В верхней строке стоят номера конституент – номера строк таблицы значений, где функция принимает значение 1, ниже – соответствующие им наборы – заголовки столбцов. Отметим, что эти две строки совсем не обязательно выписывать по таблице значений, для этого можно использовать наборы для простых импликант. Например, в наборе 1XX0 не хватает второй и третьей координаты, вместо символов X ставим всевозможные наборы нулей и единиц и получаем четыре набора 1 00 0, 1 01 0, 1 10 0 и 1 11 0. Эти наборы суть двоичные записи чисел 8, 10, 12 и 14, соответственно. Из этих же соображений расставляем по строчкам символы v, т.е. в клетках строки, помеченной 1XX0 ставим v в столбиках с заголовками 8, 10, 12 и 14.

Начинаем преобразовывать импликантную таблицу в циклическую.

(1) В столбце с заголовками 3 и 0011 всего лишь одна пометка v, следовательно, простая импликанта $\overline{x}_1\overline{x}_2$, соответствующая набору 00XX, – существенная. Поэтому вычёркиваем эту строку и все четыре столбца, имеющие пометки в этой строке, а саму импликанту $\overline{x}_1\overline{x}_2$ помещаем в тупиковую д.н.ф. В таблице 10.4 вместо вычёркиваний строки и столбцов были сделаны пометки (1) внизу или справа от нужных рядов.

(2) В столбце с заголовком 6 (0110) лишь одна пометка v, следовательно, простая импликанта $x_3\overline{x}_4$, соответствующая набору XX10, – существенная. Поэтому вычёркиваем эту строку и все три столбца, имеющие пометки в этой строке, т.е. строки и столбцов помечаем (2) внизу или справа от нужных рядов. Импликанту $x_3\overline{x}_4$ записываем в тупиковую д.н.ф.

Действие вида I из описания алгоритма более не применимо.

(3) Теперь строка X0X0 имеет только две пометки в столбцах № 8 (1000) и № 10 (1010). Эти же пометки и ещё другие есть в строке 1XX0. Значит строка X0X0 – подчинённая и её убираем – помечаем справа как (3).

(4) Строка 0X01 – подчинённая для X101, поэтому строку 0X01 убираем – помечаем справа как (4).

Действие вида II из описания алгоритма пока более не применимо, результат всех этих трансформаций приведён в таблице 10.5.

(5) Метка столбца № 5 (0101) есть также и в столбце 13 (1101), а метка из 8 (1000) – в 12 (1100). Доминирующие столбики 12 и 13 убираем.

Таблица 10.5

	5	8	12	13	
	0101	1000	1100	1101	
1XX0		v	v		
X101	v			v	
110X			v	v	(6)
	(8)	(7)	(5)	(5)	

(6) В строке 110X меток v не осталось – эту строку убираем.

(7) В столбике 8 (1000) – одна метка v, поэтому включаем $x_1\overline{x}_4$, соответствующую набору 1XX0, в тупиковую д.н.ф.

(8) В столбике 5 (0101) теперь тоже одна метка v, ввиду этого импликанту $x_2\overline{x}_3x_4$ приписываем к тупиковой д.н.ф.

Таблица теперь пустая. В итоге у нас получилась тупиковая д.н.ф.

$$\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4 .$$

Обратите внимание: в данном простом примере циклической таблицы не получилось, поэтому нам не пришлось применять процедуру ветвления. На основании этого можно также утверждать, что это – единственная тупиковая д.н.ф., а потому она же – и минимальная.

10.3 Метод нахождения всех тупиковых д.н.ф.

Пусть дана сокращённая д.н.ф., тогда основываясь на принципах метода граничных точек и метода Нельсона можно найти все тупиковые.

Опишем этот метод сразу на конкретном примере, так как общий случай выглядит почти так же. Д.н.ф. $A =_g \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee y\bar{z} \vee xy \vee xz \vee \bar{y}z$ – совершенная для некоторой функции. Элементарная конъюнкция $K_1 = \bar{x}\,\bar{y}$ задаёт две точки $P_1 = (0,0,0)$ и $P_2 = (0,0,1)$ (см. подраздел 10.1 и пример 10.3); конъюнкция $K_2 = \bar{x}\bar{z}$ – тоже две точки $P_1 = (0,0,0)$ и $P_3 = (0,1,0)$; $K_3 = y\bar{z}$ – точки $P_3 = (0,1,0)$ и $P_4 = (1,1,0)$; $K_4 = xy$ – точки $P_4 = (1,1,0)$ и $P_5 = (1,1,1)$; $K_5 = xz$ – точки $P_5 = (1,1,1)$ и $P_6 = (1,0,1)$; $K_6 = \bar{y}z$ — точки $P_6 = (1,0,1)$ и $P_2 = (0,0,1)$. Таким образом, множество N_f – множество вершин кубика, на которых функция принимает единичные значения, в данном случае состоит из шести точек P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6.

Далее заполняем импликантную таблицу, в которой шесть рабочих столбцов (по количеству точек в множестве N_f), и шесть рабочих строк (по количеству простых импликант) – таблица 10.6. Напомним, что в этой таблице в i-й строке и j-ом столбце ставим метку v, если P_j задаётся K_i, и эта клетка пустая в противном случае. Её удобно заполнять по строкам по мере нахождения точек P_j.

Имеем: точка P_1 может задаваться K_1 или K_2 символически запишем это как (1∨2), точка P_2 может задаваться K_1 или K_6 символически – (1∨6), точка P_3 может задаваться K_2 или K_3 символически – (2∨3), точка P_4 может задаваться K_3 или K_4, т. е. (3∨4), точка P_5 — K_4 или K_5 т.е. (4∨5), точка P_6 – K_5 или K_6, т.е. (5∨6). Тогда запись $L = (1\vee 2)\wedge (1\vee 6) \wedge (2\vee 3) \wedge (3\vee 4) \wedge (4\vee 5) \wedge (5\vee 6)$ означает, что все шесть точек задаются определённым сочетанием импликант K_i, т. е. на числа, стоящие в записи L нужно смотреть как на некоторые логические утверждения, другими словами, как на булевы переменные. Раскроем скобки, производя по членные «перемножения» и помня о том, что мы работаем не с числами, а с булевыми переменными, т. е. 2·6 не равно 12, а так и есть 2·6, а $k{\cdot}k = k$. Скобки «перемножаем» попарно, 1-ю на 2-ю, 3-ю на 4-ю, 5-ю на 6-ю: $L = (1{\cdot}1\vee 2{\cdot}1\vee 1{\cdot}6\vee 2{\cdot}6)(2{\cdot}3\vee 3{\cdot}3\vee 2{\cdot}4\vee 3{\cdot}4)(4{\cdot}5\vee 5{\cdot}5\vee 4{\cdot}6\vee 5{\cdot}6)$. Прежде чем умножать далее произведём упрощения, используя $k{\cdot}k = k$, и что короткая конъюнкция, например, 1 в 1-й скобке поглощает более длинные 2·1 и 1·6 (см. лемму 9.4):

Таблица 10.6

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
K_1	v	v				
K_2	v		v			
K_3			v	v		
K_4				v	v	
K_5					v	v
K_6		v				v

$$L = (1\vee 2{\cdot}6)(3\vee 2{\cdot}4)(5\vee 4{\cdot}6) = (1{\cdot}3\vee 2{\cdot}6{\cdot}3\vee 1{\cdot}2{\cdot}4\vee 2{\cdot}6{\cdot}2{\cdot}4)(5\vee 4{\cdot}6) =$$

$$= 1\cdot3\cdot5 \vee 2\cdot3\cdot5\cdot6 \vee 1\cdot2\cdot4\cdot5 \vee 2\cdot4\cdot6\cdot5 \vee 1\cdot3\cdot4\cdot6 \vee 2\cdot3\cdot4\cdot6 \vee 1\cdot2\cdot4\cdot6 \vee 2\cdot4\cdot6 =$$
$$1\cdot3\cdot5\vee2\cdot3\cdot5\cdot6\vee1\cdot2\cdot4\cdot5\vee1\cdot3\cdot4\cdot6\vee2\cdot4\cdot6.$$

Следовательно, вспоминая о смысле выражения L, получаем, что все шесть точек могут задаваться либо K_1 совместно с K_3 и K_5 (на основании утверждения $1\cdot3\cdot5$), либо K_2 совместно с K_3, K_5 и K_6 и т.д. Отсюда получаем, что $A_1 = K_1 \vee K_3 \vee K_5$, $A_2 = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6$, $A_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5$, $A_4 = K_1 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_6$ и $A_5 = K_2 \vee K_4 \vee \mathrm{K}_6$ – все тупиковые д.н.ф. для данной функции.

Обратите внимание, из этих пяти д.н.ф. только две – первая A_1 и последняя A_5 – минимальные по индексу $L_Б$.

Упражнение 10.3 *Найдите этим методом тупиковые и минимальные д.н.ф. у функций из примеров 8.1-4, 9.3-5, 10.2-3.*